2025

CANPOINT®

全品

高考复习方案

主编：肖德好

听课手册

数学

RJB

延边教育出版社

新教材 新一轮 数学

《中国高考评价体系》

指导

2025版《全品复习方案》

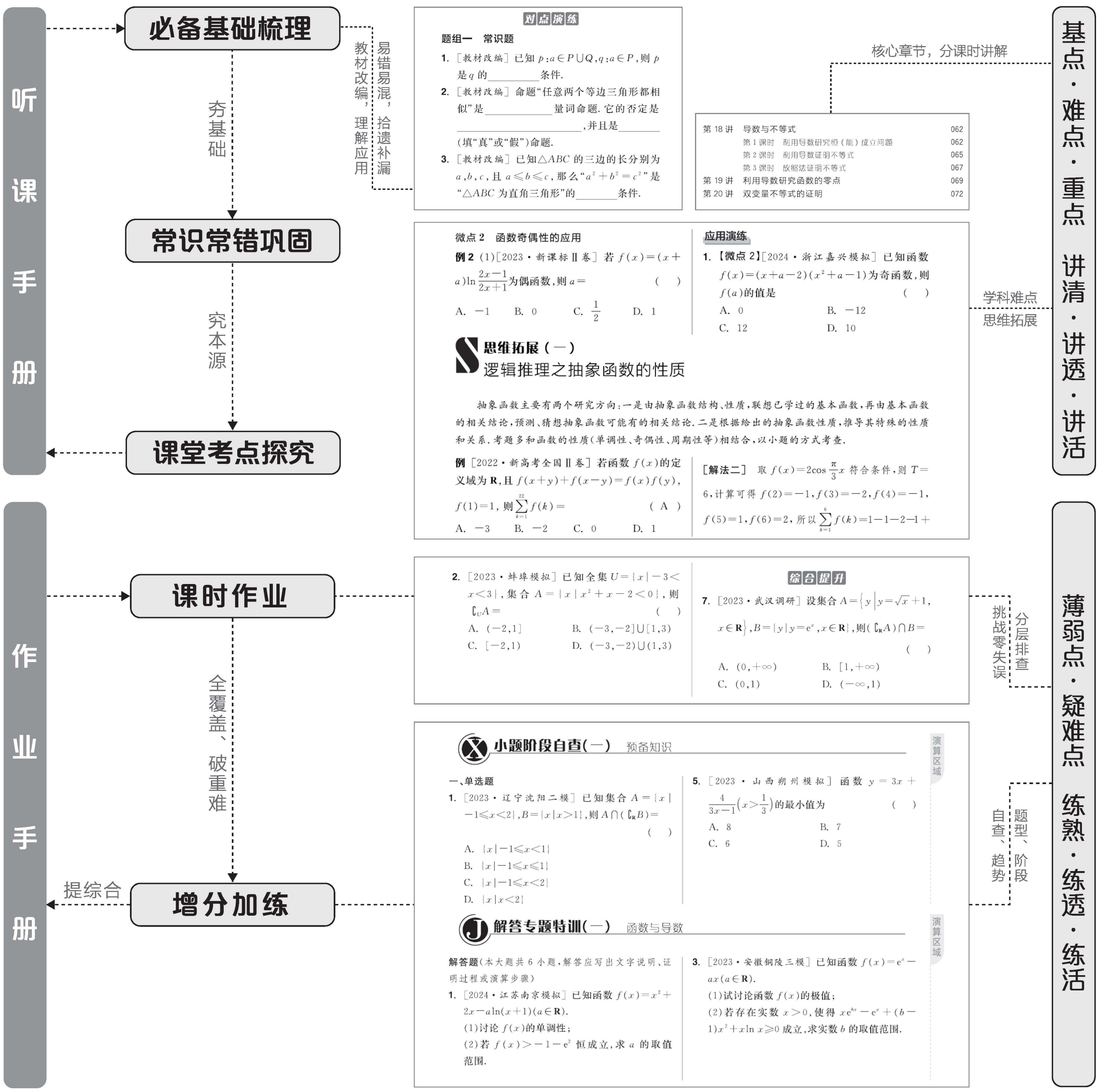
依据：《普通高中数学课程标准》

细研：高考命题特点及趋势

特点：

1. 关注新教材，细讲精练，密切贴合新教材。
2. 渗透数学学科核心素养：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析。
3. 体现高考命题趋势，精选模拟试题。
4. 结合教学一线一轮复习实际，合理设置讲练内容。

▼ 图书结构与特点



目录 CONTENTS

第八单元 解析几何

第九单元 统计

第十单元 排列、组合与二项式定理、概率

作业手册＋增分加练　［单独成册 P299～P496］
参考答案（听课手册）　［单独成册 P260～P298］　**参考答案（作业手册＋增分加练）**　［单独成册 P498～P584］

第1讲　集合

课标要求
1. 通过实例,了解集合的含义,理解元素与集合的关系.
2. 针对具体问题,能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.
3. 在具体情境中,了解全集与空集的含义.
4. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
5. 理解两个集合的并集与交集的含义,能求两个集合的并集与交集.
6. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
7. 能使用维恩图表达集合的基本关系与基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 集合及其表示方法

(1)集合元素的特点:________、________、无序性.

(2)集合与元素的关系:①属于,记为________;②不属于,记为________.

(3)集合的表示方法:列举法、________、____________和区间法.

(4)常见数集及记法

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	________	________	________	________	________

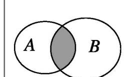
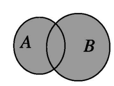
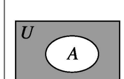
2. 集合间的基本关系

	文字语言	符号语言	记法
子集	集合A中________ ______都是集合B中的元素	$x\in A\Rightarrow x\in B$	$A\subseteq B$或______
真子集	集合A是集合B的子集,并且B中____有一个元素不属于A	①$A\subseteq B$;②$\exists x\in B$,$x\notin A$	A____B或$B\supsetneqq A$
相等	集合A,B中的元素完全______	$A\subseteq B$,$B\subseteq A$	______

（续表）

	文字语言	符号语言	记法
空集	______任何元素的集合,空集是任何集合的子集	①$\forall x$,$x\notin\varnothing$;②$\varnothing\subseteq A$	$\varnothing$

3. 集合的基本运算

运算＼表示	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	由所有属于A____属于B的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$,____$x\in B\}$		______
并集	由所有属于A____属于B的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$,____$x\in B\}$		______
补集	全集U中____属于A的所有元素组成的集合	$\{x\mid x\in U$,x____$A\}$		______

4. 集合的运算性质

(1)交集的运算性质:$A\cap B=B\cap A$;$A\cap A=A$;$A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$;$A\cap B=A\Leftrightarrow A$________$B$.

①

(2)并集的运算性质：$A\cup B=$________；$A\cup A=A$；$A\cup\varnothing=\varnothing\cup A=A$；$A\cup B=$________$\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(3)补集的运算性质：$A\cup(\complement_U A)=U$；$A\cap(\complement_U A)=$________；$\complement_U(\complement_U A)=$________；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)$________$(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cap B)=$________$\cup$________.

◆◆ **常用结论**

1. 集合子集的个数：集合 A 中有 n 个元素，则集合 A 有 2^n 个子集、2^n-1 个真子集、2^n-1 个非空子集、2^n-2 个非空真子集.

2. 子集的传递性：$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$(真子集也满足).

3. $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow \complement_U A\supseteq\complement_U B$.

4. 集合元素个数：$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$(常用在实际问题中).

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] 已知集合 $A=\{0,1,x^2-5x\}$，若 $6\in A$，则实数 x 的值为________.

2. [教材改编] 已知集合 $C=\{(x,y)\mid y=x\}$，集合 $D=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}2x-y=1,\\x+4y=5\end{cases}\right\}$，集合 D 用列举法表示为________，并且 C________D(从“$=$”“$\subseteq$”“$\supseteq$”中选一个合适的填入)

3. [教材改编] 已知全集 $U=A\cup B=\{x\in\mathbf{Z}\mid 0\leqslant x\leqslant 10\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{1,3,5,7\}$，则集合 $B=$________.

题组二 常错题

◆ **索引**：忽视集合元素的性质致错；对集合的表示方法理解不到位致错；忘记空集的情况致错；忽视集合运算中端点取值致错.

4. 已知集合 $\{1,a\}=\{a,a^2\}$，则实数 $a=$________.

5. 已知集合 $M=\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}$，$N=\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}$，则 $M\cup N=$________.

6. 已知集合 $A=\{2,3\}$，$B=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $A\cap B=B$，则实数 a 的所有可能取值组成的集合为________.

7. 设集合 $A=\{x\mid a-1<x<a+1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 1<x<5,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围为________.

课堂考点探究

探究点一 集合的概念

例 1 (1)设集合 $A=\{2,4\}$，$B=\{1,2\}$，集合 $M=\left\{z\middle|z=\dfrac{x}{y},x\in A,y\in B\right\}$，则 M 中所有元素之和为 ( )

A. 3 B. 5

C. 7 D. 9

(2)已知集合 $A=\{m+2,2m^2+m\}$，若 $3\in A$，则 m 的值为________.

◆◆ **总结反思**

解决集合含义问题的关键有三点：一是确定构成集合的元素是什么；二是看这些元素的限制条件是什么；三是根据元素的特征(满足的条件)构造关系式解决相应问题.

特别提醒：含字母的集合问题，在求出字母的值后，需要验证集合的元素是否满足互异性.

变式题 (1)已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{N}^*,y\geqslant x\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为 ( )

A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

(2)设 $a,b\in\mathbf{R}$，已知集合 $\left\{1,a,\dfrac{b}{a}\right\}=\{0,a^2,a+b\}$，则 $(a+b)^{2024}=$________.

探究点二 集合间的基本关系

例 2 (1)[2023·云南师大附中二模] 已知 $A=\{x\mid x=3k+2,k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{y\mid y=6m+5,m\in\mathbf{N}\}$，则集合 A 与集合 B 之间的关系为 ( )

A. $A=B$ B. $B\subsetneqq A$

C. $A\subsetneqq B$ D. $A\cap B=\varnothing$

(2)[2023·新课标Ⅱ卷] 设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$ ( )

A. 2 B. 1 C. $\dfrac{2}{3}$ D. -1

◆◆ **总结反思**

(1)一般利用数轴法、维恩图法以及结构法判断两集合的关系,对于含有参数的集合,需要对式子进行变形,有时需要进一步对参数进行分类讨论.

(2)确定非空集合 A 的子集的个数,需先确定集合 A 中的元素的个数.特别提醒:不能忽略任何非空集合是它自身的子集,空集是非空集合的真子集.

(3)根据集合的关系求参数值(或取值范围)的关键是将条件转化为元素满足的式子或区间端点间的关系.

变式题 (1)满足 $\{1\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3\}$ 的集合 A 的个数是 ( )

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 8

(2)[2023·吉林模拟] 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid |x|<2\}$, $B=\{x\mid ax-1=0\}$,若 $B\subsetneqq A$,则实数 a 的值为 ( )

A. 0 或 1　　B. $\frac{1}{2}$或 1

C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

探究点三 集合的基本运算

》角度 1 集合的运算

例 3 (1)[2023·杭州期末] 已知集合 $A=\{x\mid x^2-1<0\}$, $B=\{x\mid \lg x\leqslant 0\}$,则 $A\cup B=$ ( )

A. $\{x\mid 0<x<1\}$　　B. $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

C. $\{x\mid -1<x<1\}$　　D. $\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$

(2)[2023·全国乙卷] 设集合 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x\mid x<1\}$, $N=\{x\mid -1<x<2\}$,则 $\{x\mid x\geqslant 2\}=$ ( )

A. $\complement_U(M\cup N)$　　B. $N\cup(\complement_U M)$

C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $M\cup(\complement_U N)$

◆◆ **总结反思**

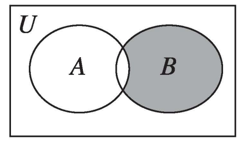
对于已知集合的运算,可根据集合的交集、并集和补集的定义直接求解,必要时可结合数轴以及 Venn 图求解.

变式题 (1)[2023·新课标Ⅰ卷] 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$, $N=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}$,则 $M\cap N=$ ( )

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{-2\}$　　D. $\{2\}$

(2)[2023·广东六校一联] 已知集合 $U=\mathbf{R}$, $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-3}{x+1}>0\right\}$, $B=\{x\mid y=\ln(3-x)\}$,则图中阴影部分表示的集合为 ( )



A. $[-1,3]$　　B. $(3,+\infty)$

C. $(-\infty,3]$　　D. $[-1,3)$

》角度 2 利用集合的运算求参数的值(范围)

例 4 (1)设集合 $A=\{x\mid x^2-4\leqslant 0\}$, $B=\{x\mid 2x+a\leqslant 0\}$,且 $A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$,则 $a=$ ( )

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

(2)已知集合 $A=\{2,-2\}$, $B=\{x\mid x^2-ax+4=0\}$,若 $A\cup B=A$,则实数 a 的取值集合为 ( )

A. $\{a\mid -4<a<4\}$　　B. $\{a\mid -2<a<2\}$

C. $\{-4,4\}$　　D. $\{a\mid -4\leqslant a\leqslant 4\}$

◆◆ **总结反思**

利用集合的运算求参数的值或取值范围的方法

(1)与不等式有关的集合,一般利用数轴解决,要注意端点值能否取到.

(2)若集合中的元素能一一列举,则一般先用观察法得到不同集合中元素之间的关系,再列方程(组)求解.

变式题 (1)(多选题)已知集合 $M=\{x\mid 6x^2-5x+1=0\}$,集合 $P=\{x\mid ax=1\}$,若 $M\cap P=P$,则实数 a 的值可能为 ( )

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

(2)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\geqslant a\}$,集合 $B=\{x\in\mathbf{Z}\mid 2^x\leqslant 4\}$.若 $A\cap B$ 只有 4 个子集,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-2,-1]$　　B. $[-2,-1]$

C. $[0,1]$　　D. $(0,1]$

》角度 3 集合语言的运用

例 5 (1)某中学的学生积极参加体育锻炼,其中有 96%的学生喜欢足球或游泳,60%的学生喜欢足球,82%的学生喜欢游泳,则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 ( )

A. 62%　　B. 56%

C. 46%　　D. 42%

(2)已知U是非空数集,若非空集合A_1,A_2满足以下三个条件,则称(A_1,A_2)为集合U的一种真分拆,并规定(A_1,A_2)与(A_2,A_1)为集合U的同一种真分拆.

①$A_1\cap A_2=\varnothing$;

②$A_1\cup A_2=U$;

③$A_i(i=1,2)$的元素个数不是A_i中的元素.

则集合$U=\{1,2,3,4,5,6\}$的真分拆的种数是 ( )

A. 5　　B. 6　　C. 10　　D. 15

◆◆ **总结反思**

以集合语言为背景的新定义问题,需正确理解新定义(即分析新定义的特点,把新定义所叙述的问题的本质弄清楚),转化成熟知的数学情境,并能够应用到具体的解题过程中,这是破解新定义集合问题的关键所在.

变式题 [2023·湖南师大附中模拟] 若一个非空数集F满足:对任意$a,b\in F$,都有$a+b,a-b,ab\in F$,且当$b\neq 0$时,有$\frac{a}{b}\in F$,则称F为一个数域,给出以下四个命题:

①0是任何数域的元素;

②若数域F有非零元素,则$2024\in F$;

③集合$P=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$为数域;

④有理数集为数域.

其中真命题的个数为________.

第2讲　常用逻辑用语

课标要求

1. 理解必要条件、充分条件、充要条件的意义,理解性质定理与必要条件的关系、判定定理与充分条件的关系、数学定义与充要条件的关系.
2. 理解全称量词与存在量词的意义,能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定,能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 全称量词与存在量词

(1)一般地,“________”“________”“________”在陈述中表示所述事物的全体,称为全称量词,用符号“________”表示.

(2)“________”“________”“____________”在陈述中表示所述事物的个体或部分,称为存在量词,用符号“________”表示.

(3)含有一个量词的命题的否定:

含有量词的命题	p	$\neg p$	结论
全称量词命题	$\forall x\in M$, $p(x)$	$\exists x\in M$, $\neg p(x)$	全称量词命题的否定是________________
存在量词命题	$\exists x\in M$, $p(x)$	$\forall x\in M$, $\neg p(x)$	存在量词命题的否定是________________

2. 常用的正面叙述词语和它的否定词语

正面词语	等于(=)	大于(>)	小于(<)	是
否定词语	不等于(≠)	不大于(≤)	不小于(≥)	不是

正面词语	都是	任意的	所有的	至多有一个	至少有一个
否定词语	不都是	某个	某些	至少有两个	一个也没有

3. 充分条件、必要条件与充要条件的概念

若$p\Rightarrow q$,则p是q的________条件,q是p的________条件	
p是q的________条件	$p\Rightarrow q$且$q\nRightarrow p$
p是q的________条件	$p\nRightarrow q$且$q\Rightarrow p$
p是q的________条件	$p\Leftrightarrow q$
p是q的____________条件	$p\nRightarrow q$且$q\nRightarrow p$

对点演练

题组一　常识题

1. [教材改编] 已知$p:a\in P\cup Q$,$q:a\in P$,则p是q的__________条件.
2. [教材改编] 命题“任意两个等边三角形都相似”是____________量词命题.它的否定是________________________,并且是________(填“真”或“假”)命题.
3. [教材改编] 已知$\triangle ABC$的三边的长分别为a,b,c,且$a\leqslant b\leqslant c$,那么“$a^2+b^2=c^2$”是“$\triangle ABC$为直角三角形”的________条件.

题组二　常错题

◆ **索引**：对充分必要条件判断错误；全称量词命题或存在量词命题的否定出错；充分、必要条件的推理考虑不全面.

4. 已知 $p:x<a,q:x-2\leq 0$.

①若 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是________；

②若 p 是 q 的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是________.

5. 命题“奇数的立方是奇数”的否定是________________.

6. 已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 的__________条件.

课堂考点探究

探究点一　全称量词与存在量词

» 角度1　全称量词命题与存在量词命题的真假判断

例1 [2023·山西运城一模] 下列命题是真命题的为　　(　　)

A. $\exists x\in\mathbf{N},4x<-3$　　B. $\forall x\in\mathbf{R},x^2+2>0$

C. $\forall x\in\mathbf{N},2^x>x^2$　　D. $\exists x\in\mathbf{Z},3x-2=0$

◆◆ **总结反思**

全称量词命题与存在量词命题真假的判断方法：

命题名称	真假	判断方法一	判断方法二
全称量词命题	真	所有对象使命题为真	否定为假
	假	存在一个对象使命题为假	否定为真
存在量词命题	真	存在一个对象使命题为真	否定为假

变式题 下列命题中，为真命题的是　　(　　)

A. $\exists x\in\mathbf{R},\sin^2\frac{x}{3}+\cos^2\frac{x}{3}=\frac{1}{3}$

B. $\forall x\in(0,\pi),\sin x>\cos x$

C. $\exists x\in\mathbf{R},x^2+x=-2$

D. $\forall x\in(0,+\infty),e^x>x+1$

» 角度2　含有一个量词的命题的否定

例2 (1) $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),x>\sin x$ 的否定是　(　　)

A. $\exists x\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right),x\leq\sin x$

B. $\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),x\leq\sin x$

C. $\forall x\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right),x>\sin x$

D. $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),x\leq\sin x$

(2)命题 p：有的等差数列是等比数列，则其否定为　　(　　)

A. 有的等差数列不是等比数列

B. 有的等比数列是等差数列

C. 所有的等差数列都是等比数列

D. 所有的等差数列都不是等比数列

◆◆ **总结反思**

全称量词命题与存在量词命题的否定：

①改写量词：确定命题所含量词的类型，省去量词的要结合命题的含义加上量词，再对量词进行改写.

②否定结论：对原命题的结论进行否定.

变式题 (1)命题“$\exists x>0,e^x=x+1$”的否定是　　(　　)

A. $\forall x>0,e^x\neq x+1$

B. $\forall x\leq 0,e^x\neq x+1$

C. $\exists x>0,e^x\neq x+1$

D. $\forall x>0,e^x=x+1$

(2)17世纪，数学家费马提出猜想：“对任意正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解”，这个猜想被称为费马大定理. 则费马大定理的否定为　　(　　)

A. 对任意正整数 n，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 都没有正整数解

B. 对任意正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

C. 存在正整数 $n\leq 2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

D. 存在正整数 $n>2$，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 至少存在一组正整数解

角度3　含量词命题的应用

例3 (1)若“$\exists x\in[-1,2],-x^2+2\geqslant a$”是假命题,则实数$a$的取值范围是　　(　　)

A. $a>2$　　B. $a\geqslant 2$

C. $a>-2$　　D. $a\leqslant -2$

(2)已知函数$f(x)=x+\frac{4}{x}\left(x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\right)$,$g(x)=2^x+a(x\in[2,3])$,若$\forall x_1\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,$\exists x_2\in[2,3]$,$f(x_1)\leqslant g(x_2)$,则实数$a$的取值范围是________.

总结反思

根据命题的真假求参数的一般步骤:

(1)根据题目条件,推出每一个命题的真假(有时不一定只有一种情况);

(2)求出每个命题是真命题时参数的取值范围;

(3)根据每个命题的真假情况,求出参数的取值范围.

变式题 (1)已知p:“$\exists x\in\mathbf{R},ax^2+2x+1<0$”是假命题;$q$:$a\in(1,+\infty)$.则$q$是$p$的__________条件.(从“充分不必要”“必要不充分”“充要”“既不充分也不必要”中选一个正确的填入)

(2)[2023·湖北枣阳一中月考] 若“$\exists x\in[1,2],2x^2-\lambda x+1<0$”是假命题,则实数$\lambda$的取值范围是　　(　　)

A. $(-\infty,2\sqrt{2}]$　　B. $\left[2\sqrt{2},\frac{9}{2}\right]$

C. $(-\infty,3]$　　D. $\left[\frac{9}{2},+\infty\right)$

探究点二　充分条件与必要条件的判断

例4 (1)[2022·浙江卷] 设$x\in\mathbf{R}$,则“$\sin x=1$”是“$\cos x=0$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)[2023·重庆巴蜀中学月考] “$x<0$”是“$\log_3(x+1)<0$”的　　(　　)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(3)[2023·厦门二诊] 关于x的不等式$ax^2-2x+1>0$恒成立的充分不必要条件可以是(　　)

A. $a\geqslant 1$　　B. $a>1$

C. $0<a<\frac{1}{2}$　　D. $a>2$

变式题 (1)[2023·江苏苏州中学月考] “$a+b>4$”是“$a>2$且$b>2$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)[2023·山东德州三模] 已知p:$x=-1$,q:向量$\boldsymbol{a}=(1,x)$与$\boldsymbol{b}=(x+2,x)$共线,则p是q的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

总结反思

充分条件、必要条件的两种判定方法

(1)定义法:适用于定义、定理的判断问题;

(2)集合法:多适用于条件中涉及参数的取值范围的推断问题.

探究点三　充分条件与必要条件的应用

例5 (1)设α,β为两个平面,则$\alpha/\!/\beta$的充要条件是　　(　　)

A. α内有无数条直线与β平行

B. α内有两条相交直线与β平行

C. α与β平行于同一条直线

D. α与β垂直于同一个平面

(2)[2023·福州三中模拟] 设p:$4x-3<1$;q:$x-(2a+1)<0$.若p是q的充分不必要条件,则　　(　　)

A. $a>0$　　B. $a>1$

C. $a\geqslant 0$　　D. $a\geqslant 1$

总结反思

充分条件、必要条件的应用一般表现在参数的求解问题上,解题时通常把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系,然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解.解题过程中要注意检验区间的端点值.

变式题 (1)已知集合$A=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}\leqslant 0\right.\right\}$,$x\in A$的一个必要条件是$x\geqslant a$,则实数$a$的取值范围为 ( )

A. $a<0$ B. $a\geqslant 2$

C. $a\leqslant -1$ D. $a\geqslant -1$

(2)已知p:$f(x)=x-a\ln x$在$[2,+\infty)$上单调递增;q:$a<m$.若p是q的充分不必要条件,则实数m的取值范围为________.

第3讲 等式与不等式

课标要求 梳理等式的性质,理解不等式的概念,掌握不等式的性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 两个实数比较大小的方法

(1)作差法$\begin{cases}a-b>0\Leftrightarrow a______ b,\\ a-b=0\Leftrightarrow a______ b,\\ a-b<0\Leftrightarrow a______ b.\end{cases}$

(2)作商法

$\begin{cases}\frac{a}{b}>1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b(a\in\mathbf{R},b>0),\\ \frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b(a,b\neq 0),\\ \frac{a}{b}<1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\_\_\_\_ b(a\in\mathbf{R},b>0).\end{cases}$

2. 等式的性质

(1)若$a=b$,$b=c$,则$a=c$.

(2)如果$a=b$,则对任意c,都有________或________.

(3)如果$a=b$,则对任意不为零的c,都有________或________.

3. 不等式的性质

性质	内容
可加性	如果$a>b$,那么$a+c$______$b+c$
可乘性	如果$a>b$,$c>0$,那么ac______bc
	如果$a>b$,$c<0$,那么ac______bc
传递性	如果$a>b$,$b>c$,那么______
对称性	$a>b\Leftrightarrow b<a$

4. 不等式性质的推论

推论	内容
移项法则	如果$a+b>c$,那么$a>c-b$
同向不等式相加	如果$a>b$,$c>d$,那么______
同向不等式相乘	如果$a>b>0$,$c>d>0$,那么______
可乘方性	如果$a>b>0$,那么______$(n\in\mathbf{N},n>1)$
可开方性	如果$a>b>0$,那么$\sqrt{a}>\sqrt{b}$

◆◆ **常用结论**

1. 若$a<x<b$,$c<y<d$,则$a-d<x-y<b-c$.

2. 若$\frac{a}{b}<1$,$a,b,m>0$,则$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1$;

若$\frac{a}{b}>1$,$a,b,m>0$,则$\frac{a}{b}>\frac{a+m}{b+m}>1$.

对点演练

题组一 常识题

1. [教材改编] 设$t=a+2b$,$s=a+b^2+1$,则s与t的大小关系是________.

2. [教材改编] 已知$2<a<3$,$-2<b<-1$,则$2a+b$的取值范围为________.

3. [教材改编] 下列命题中为真命题的是________.(填写序号)

①若$a>b>0$,则$ac^2>bc^2$;

②若$a<b<0$,则$a^2>ab>b^2$;

③若$a>b>0$且$c<0$,则$\frac{c}{a^2}>\frac{c}{b^2}$;

④若$a>b$且$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,则$ab<0$.

题组二 常错题

◆**索引**:求取值范围时乱用不等式的加法法则致错;乘法运算时不注意符号的影响致错;运用作差法时对差的变形不彻底或变形方向不明确致错.

4. 已知$-1<x<4$,$2<y<3$,则$x-y$的取值范围是________.

5. 已知实数$a\in(-3,1)$,$b\in\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$,则$\frac{a}{b}$的取值范围是________.

6. 设$p=1+2x^4$,$q=2x^3+x^2$,则p,q的大小关系是________.

探究点一 比较数(式)的大小

例 1 (1)设 $x,y\in\mathbf{R}$,比较 $(x^2-y^2)^2$ 与 $xy(x-y)^2$ 的大小.

(2)已知 a,b 都是正数,试比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

◆◆ **总结反思**

(1)判断两个式子大小关系的常用方法:作差法、作商法、不等式性质法、函数单调性法、中间量法、特殊值法等.

(2)作差(商)法的一般步骤是:作差(商),变形,定号,得出结论.

变式题 (1)[2023·福建三明一模] 已知 $a=\sqrt{2}$,$b=\sqrt{7}-\sqrt{3}$,$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

(2)若 $a=\frac{\ln 3}{3}$,$b=\frac{\ln 4}{4}$,$c=\frac{\ln 5}{5}$,则 ( )

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

探究点二 不等式的性质

例 2 (1)[2023·合肥一模] 已知 $a>b>c>d>0$,且 $a+d=b+c$,则下列不等式中不成立的是 ( )

A. $a+c>b+d$　　B. $ac>bd$

C. $ad<bc$　　D. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$

(2)(多选题)若 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$,则 ( )

A. $|a|<|b|$　　B. $ac<bc$

C. $\frac{a-b}{c}>0$　　D. $0<\frac{a}{b}<1$

◆◆ **总结反思**

解决不等式有关问题常用的三种方法:

(1)直接利用不等式的性质逐个验证,利用不等式的性质判断不等式是否成立时要特别注意前提条件;

(2)利用特殊值法排除错误答案;

(3)构造函数,利用函数的单调性.

变式题 (1)(多选题)[2023·海口模拟] 下列四个条件中,是 $x>y$ 的充分不必要条件的是 ( )

A. $xc^2>yc^2$　　B. $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<0$

C. $|x|>|y|$　　D. $\ln x>\ln y$

(2)已知 $a>b$,则下列不等式中一定成立的是 ( )

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $a^2>b^2$

C. $\ln a>\ln b$　　D. $2^{a-b}>1$

(3)(多选题)[2023·湖南长郡中学二模] 已知实数 a,b,c 满足 $0<a<b<c$,则下列结论正确的是 ( )

A. $\frac{1}{c-a}>\frac{1}{b-a}$

B. $\frac{b}{a}>\frac{b+c}{a+c}$

C. $\frac{1}{a(c-a)}>\frac{1}{b(c-a)}$

D. $ab+c^2>ac+bc$

探究点三 利用不等式性质求取值范围

例 3 (1)已知三个正数 a,b,c 满足 $a\leqslant b+c\leqslant 2a$,$b\leqslant a+c\leqslant 2b$,则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 ( )

A. $\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

C. $[2,3]$　　D. $[1,2]$

(2)若 $-1<a+b<3$,$2<a-b<4$,则 $2a+3b$ 的取值范围为________.

◆◆ **总结反思**

求代数式的取值范围需注意两点:(1)严格运用不等式的性质;(2)利用整体思想,通过“一次性”不等关系的运算求解范围,防止在多次运用不等式的性质时扩大变量的取值范围.

变式题 已知实数 x,y 满足 $-1\leqslant x+y\leqslant 3,4\leqslant 2x-y\leqslant 9$,则 ( )

A. $1\leqslant x\leqslant 3$　　B. $-2\leqslant y\leqslant 1$

C. $2\leqslant 4x+y\leqslant 15$　　D. $\frac{1}{3}<x-y<\frac{23}{3}$

第 4 讲　均值不等式

课标要求 掌握均值不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a,b>0)$.结合具体实例,能用均值不等式解决简单的最大值或最小值问题.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 均值不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

(1)均值不等式成立的条件:________.

(2)等号成立的条件:当且仅当________时取等号.

(3)数________称为 a,b 的算术平均数;数 $\sqrt{ab}$ 称为 a,b 的几何平均数.

2. 几个重要的不等式

(1)$a^2+b^2\geqslant$______$(a,b\in\mathbf{R})$.

(2)$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant$______$(a,b$ 同号$)$.

(3)$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a,b\in\mathbf{R})$.

(4)$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}(a,b\in\mathbf{R})$.

3. 利用均值不等式求最值问题

已知 $x>0,y>0$.

(1)如果积 xy 是定值 p,那么当且仅当 $x=y$ 时,$x+y$ 有最小值,是______.(简记:积定和最小)

(2)如果和 $x+y$ 是定值 p,那么当且仅当 $x=y$ 时,xy 有最大值,是______.(简记:和定积最大)

◆◆ **常用结论**

1. 若 $a>0,b>0$,则 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

2. 当 $x>0$ 时,函数 $y=x+\frac{a}{x}\ (a>0)$ 在 $x=\sqrt{a}$ 处取得最小值 $2\sqrt{a}$;当 $x<0$ 时,函数 $y=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 在 $x=-\sqrt{a}$ 处取得最大值 $-2\sqrt{a}$.

对点演练

题组一　常识题

1. [教材改编] 当 $x=$________时,$x^2+\frac{1}{x^2}$ 取得最小值________.

2. [教材改编] 已知 $x>1$,则 $x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值为________.

3. [教材改编] 用篱笆围一个面积为 100 m^2 的矩形菜园,则当所用篱笆最短时,所用篱笆的长度是______m;若矩形菜园一边靠墙,墙的长度为 9 m,则当矩形和墙平行的边长为________m 时,所用篱笆最短.

题组二　常错题

◆ **索引**:对于均值不等式的应用,注意字母的正负以及等号成立的条件;等号不成立时,通常考虑利用函数的单调性求解.

4. 函数 $f(x)=2x+\frac{8}{x}+1\ (x<0)$ 的最大值为________.

5. 当 $x\geqslant 2$ 时,$x+\frac{4}{x+2}$ 的最小值为________.

探究点一　直接用均值不等式

例 1 (1)已知 x,y 都是正数,且 $x\neq y$,则下列选项不恒成立的是 (　　)

A. $\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$　　B. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2$

C. $\frac{2xy}{x+y}<\sqrt{xy}$　　D. $xy+\frac{1}{xy}>2$

(2)(多选题)[2023·山东济宁二模] 已知 $m>0,n>0$,且 $m+n=2mn$,则下列结论中正确的是 (　　)

A. $mn\geqslant1$　　B. $m+n\leqslant\sqrt{2}$

C. $m^2+n^2\geqslant2$　　D. $2m+n\geqslant3+2\sqrt{2}$

◆◆ 总结反思

利用均值不等式比较大小,主要有两个思路:一是直接建立不等关系比较大小;二是观察待比较式子的结构特征,合理选取均值不等式或其变形形式,结合不等式的性质比较大小.

变式题 (1)下列不等式中,一定成立的是 (　　)

A. $x+\frac{4}{x}\geqslant4$　　B. $\ln x+\frac{1}{\ln x}\geqslant2$

C. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$　　D. $2^x+2^{-x}\geqslant2$

(2)(多选题)已知 $a>0,b>0,a^2+b^2-ab=2$,则下列不等式恒成立的是 (　　)

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant\sqrt{2}$　　B. $ab\leqslant2$

C. $a+b\leqslant2\sqrt{2}$　　D. $a^2+b^2\geqslant4$

探究点二　变形用均值不等式求最值

微课1·方法

微点 1　配凑法

例 2 (1)设实数 x 满足 $x>0$,则函数 $y=2+3x+\frac{4}{x+1}$的最小值为 (　　)

A. $4\sqrt{3}-1$　　B. $4\sqrt{3}+2$

C. $4\sqrt{2}+1$　　D. 6

(2)已知 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $x\sqrt{1-2x^2}$ 的最大值为________.

◆◆ 总结反思

均值不等式具有将"和式"转化为"积式"和将"积式"转化为"和式"的放缩功能,利用均值不等式求最值时,要根据式子的特征灵活变形,先配凑出积、和为常数的形式,再利用均值不等式求解.

微点 2　常数代换法

例 3 (1)[2023·河北邯郸一模] 已知 $a>0,b>0$,且 $a+b=2$,则$\frac{2}{a+1}+\frac{8}{b+1}$的最小值是 (　　)

A. 2　　B. 4　　C. $\frac{9}{2}$　　D. 9

(2)已知 $a>0,b>0$,且 $ab=1$,则$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$的最小值为________.

◆◆ 总结反思

常数代换法主要解决形如"已知 $x+y=t$(t 为常数),求 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 的最值"的问题,通常先将 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 转化为 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)\cdot\frac{x+y}{t}$,再用均值不等式求最值.

微点 3　消元法

例 4 (1)已知正实数 a,b 满足 $2a+b=ab$,则$\frac{a}{4}-\frac{2}{b}$的最小值为 (　　)

A. 0　　B. 2　　C. 4　　D. 6

(2)[2023·江苏镇江二模] 已知 $xy>0$,且 $x^2+2xy=1$,则 x^2+y^2 的最小值为________.

◆◆ 总结反思

消元法,即根据条件建立两个量之间的函数关系,然后代入代数式转化为函数的最值求解.有时会出现多元的问题,解决方法是消元后利用均值不等式求解.

应用演练

1. 【微点 1】[2023·福建南平一模] 若函数 $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}(x>2)$在 $x=a$ 处取最小值,则 $a=$ (　　)

A. $1+\sqrt{5}$　　B. 2

C. 4　　D. 6

2. 【微点 2】[2023·江苏连云港二模] 已知 $x+y=1, x>0, y>0$，则 $\frac{1}{2x}+\frac{x}{y+1}$ 的最小值为 ( )

A. $\frac{5}{4}$　　B. 0

C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 【微点 1、微点 3】已知正实数 a,b 满足 $ab+2a-2=0$，则 $4a+b$ 的最小值是 ( )

A. 2　　B. $4\sqrt{2}-2$

C. $4\sqrt{3}-2$　　D. 6

4. 【微点 2】(多选题)[2024·江苏扬州模拟] 已知 $a>0, b>0$ 且 $a+b=\sqrt{2}$，则下列式子中一定成立的是 ( )

A. $a^2+b^2\geqslant 1$　　B. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant 2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. $2^{a-b}>\frac{1}{2}$　　D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2^{\frac{3}{4}}$

5. 【微点 1】已知 $0<x<1$，则当 $x(4-3x)$ 取得最大值时，x 的值为________.

6. 【微点 3】已知 $x>0, y>0$，$\frac{1}{x}+y=2$，则 $\frac{x}{y}$ 的最小值为________.

探究点三　均值不等式的实际应用

例 5　为响应国家扩大内需的政策，某厂家拟在 2024 年举行促销活动，经调查测算，该产品的年销量(即该厂的年产量) x (单位：万件)与年促销费用 t ($t\geqslant 0$，单位：万元)满足 $x=4-\frac{k}{2t+1}$ (k 为常数). 如果不搞促销活动，则该产品的年销量只能是 1 万件. 已知 2024 年生产该产品的固定投入为 6 万元，每生产 1 万件该产品需要再投入 12 万元，该厂家将每件产品的销售价格定为每件产品平均成本的 1.5 倍(产品成本包括固定投入和再投入两部分).

(1)设该厂家 2024 年该产品的年利润为 y 万元，求 y 关于 t 的函数关系式.

(2)该厂家 2024 年该产品的年促销费用为多少万元时该产品的年利润最大?

◆◆ **总结反思**

有关函数最值的实际问题的解题技巧

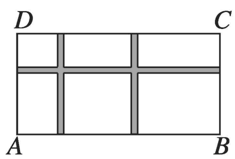
(1)根据实际问题建立函数的解析式，再利用均值不等式求得函数的最值.

(2)设变量时一般要把求最大值或最小值的变量定义为函数.

(3)解应用题时，一定要注意变量的实际意义及其取值范围.

(4)在应用均值不等式求函数最值时，若等号取不到，可利用函数的单调性求解.

变式题 (1)[2023·湖南名校联考] 某社区计划在一块空地上种植花卉，已知这块空地是面积为 1800 m^2 的矩形 $ABCD$，为了方便居民观赏，在这块空地中间修了如图所示的三条宽度为 2 m 的人行通道，则种植花卉区域的面积的最大值是 ( )



A. 1208 m^2　　B. 1448 m^2

C. 1568 m^2　　D. 1698 m^2

(2)一家物流公司计划建立仓库储存货物，经过市场了解到下列信息：每月的土地占地费 y_1 (单位：万元)与仓库到车站的距离 x (单位：km)成反比，每月的库存货物费 y_2 (单位：万元)与仓库到车站的距离 x (单位：km)成正比. 若在距离车站 10 km 处建立仓库，则每月的土地占地费和库存货物费分别为 4 万元和 16 万元，则要使两项费用之和最小，仓库到车站的距离应为________km.

第 5 讲　一元二次方程、不等式

课标要求　1. 会结合一元二次函数的图象，判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数，了解函数的零点与方程根的关系.

2. 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程，了解一元二次不等式的现实意义. 能借助一元二次函数求解一元二次不等式，并能用集合表示一元二次不等式的解集.

3. 借助一元二次函数的图象，了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

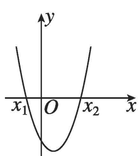
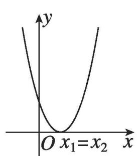
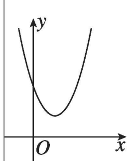
课前基础巩固

知识聚焦

1. 一元二次不等式

一般地，形如 $ax^2+bx+c>0$ 的不等式称为一元二次不等式，其中 a,b,c 是常数，而且 $a\neq0$.

2. 三个“二次”间的关系

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两个不相等的实数根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等实数根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	________	________	________
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	________	________	________

3. 分式不等式

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$；

$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$.

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant0,\\ g(x)\neq0;\end{cases}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant0,\\ g(x)\neq0.\end{cases}$

◆◆ **常用结论**

1. 绝对值不等式 $|x|>a(a>0)$ 的解集为 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$，绝对值不等式 $|x|<a(a>0)$ 的解集为 $(-a,a)$.

2. (1)对于不等式 $ax^2+bx+c>0$，求解时不要忘记讨论 $a=0$ 时的情形；

(2)注意区分 $\Delta<0$ 时，$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$的解集为 $\mathbf{R}$ 还是 $\varnothing$.

对点演练

题组一　常识题

1. [教材改编] 不等式 $x^2-5x-6\geqslant0$ 的解集为__________.

2. [教材改编] 若一元二次不等式 $2kx^2+kx-\dfrac{3}{8}<0$ 对于一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 k 的取值范围为________.

3. [教材改编] 若关于 x 的不等式 $-x^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x|x<-3$ 或 $x>4\}$，则关于 x 的不等式 $cx^2-bx-1>0$ 的解集是______________.

题组二　常错题

◆**索引**：变形必须等价；注意二次项系数的符号；讨论参数时不要忽视二次项的系数.

4. 不等式 $x(x+3)<2(x+3)$ 的解集为________.

5. 不等式 $(x+1)(2-x)\geqslant0$ 的解集为________.

6. 若关于 x 的不等式 $ax^2+2x+1<0$ 有实数解，则 a 的取值范围是________.

探究点一 一元二次不等式的求解

角度1 不含参的不等式

例1 (1)不等式$\frac{2x+1}{3-x}\geqslant 1$的解集为________.

(2)不等式组$0<x^2-x-2\leqslant 4$的解集为________.

总结反思

解一元二次不等式的一般步骤是:①化为标准形式($a>0$);②确定判别式Δ的符号,若$\Delta\geqslant 0$,则求出该不等式对应的一元二次方程的根,若$\Delta<0$,则对应的一元二次方程无根;③结合二次函数的图象得出不等式的解集.特别地,若一元二次不等式的左边能因式分解,则可直接写出不等式的解集.

角度2 含参的不等式

例2 解关于x的不等式$ax^2-2(a+1)x+4<0$.

总结反思

含有参数的不等式的求解,往往需要对参数进行分类讨论.

①若二次项系数为常数,首先确定二次项系数是否为正数,再考虑分解因式,对参数进行分类讨论,若不易分解因式,则可依据判别式符号进行分类讨论.

②若二次项系数为参数,则应先考虑二次项系数是否为零,确定不等式是不是二次不等式,然后再讨论二次项系数不为零的情形,以便确定解集的形式.

③对方程的根进行讨论,比较大小,以便写出解集.

变式题 解关于x的不等式$x^2-4x-t(t-4)<0$($t\in\mathbf{R}$).

探究点二 一元二次不等式恒成立问题

角度1 在R上的恒成立问题

例3 若不等式$(a-1)x^2+(a-1)x+a>0$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立,则实数a的取值范围是 ( )

A. $a<-\frac{1}{3}$或$a>1$ B. $a>1$

C. $a\geqslant 1$ D. $-\frac{1}{3}<a\leqslant 1$

◆◆ **总结反思**

(1)若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 恒成立,则满足 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=b^2-4ac<0.\end{cases}$

(2)若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$ 恒成立,则满足 $\begin{cases}a<0,\\ \Delta=b^2-4ac<0.\end{cases}$

(3)若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立,则首先考虑 $a=0$ 时是否满足.

变式题 若不等式 $mx^2+mx-4<2x^2+2x-1$ 对任意实数 x 恒成立,则实数 m 的取值范围是( )

A. $(-2,2)$

B. $(-10,2]$

C. $(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2]$

» 角度 2 在给定区间上的恒成立问题

例 4 对任意的 $x\in(1,4)$,不等式 $ax^2-2x+2>0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $[1,+\infty)$　　B. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

C. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

◆◆ **总结反思**

(1)一元二次不等式在给定区间上的恒成立问题,其本质是将不等式恒成立问题转化为最大(小)值问题,即 $f(x)\geqslant0$ $(x\in[a,b])$恒成立等价于 $f(x)_{\min}\geqslant0(x\in[a,b])$,$f(x)\leqslant0$ $(x\in[a,b])$恒成立等价于 $f(x)_{\max}\leqslant0(x\in[a,b])$.

(2)若所给的不等式能通过恒等变形使参数与变量分离于不等式的两端,则可避免分类讨论,直接求出参数范围.

变式题 设函数 $f(x)=mx^2-mx-1$,若对于任意 $x\in[1,3]$,$f(x)<-m+4$ 恒成立,则实数 m 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,0]$

B. $\left[0,\frac{5}{7}\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{5}{7}\right)$

D. $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{5}{7}\right)$

» 角度 3 给定参数范围的恒成立问题

例 5 若对任意 $m\in[-1,1]$,函数 $f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m$ 的值恒大于零,则 x 的取值范围是 ( )

A. $(1,3)$

B. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

C. $(1,2)$

D. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

◆◆ **总结反思**

利用变换主元法解决一元二次不等式在给出参数取值范围情况下的恒成立问题时,一定要搞清谁是变换后的主元,谁是变换后的参数,一般地,知道谁的范围,谁就是变换后的主元,求谁的范围,谁就是变换后的参数.

变式题 若不等式 $x^2-ax\geqslant16-3x-4a$ 对任意 $a\in[-2,4]$恒成立,则 x 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,-8]\cup[3,+\infty)$

B. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

C. $[-8,6]$

D. $(0,3]$

探究点三 一元二次方程根的分布

例 6 关于 x 的方程 $x^2+(m-3)x+m=0$ 满足下列条件,求 m 的取值范围.

(1)有两个正根;

(2)一个根大于 1,一个根小于 1;

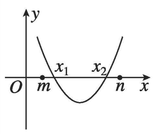
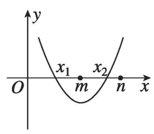
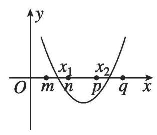
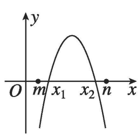
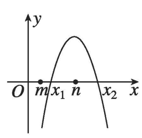
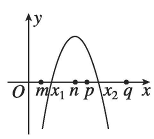
(3)一个根在$(-2,0)$内,另一个根在$(0,4)$内;

(4)一个根小于 2,一个根大于 4;

(5)两个根都在$(0,2)$内.

◆◆ **总结反思**

设函数 $f(x)=ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

分布情况	两根都在(m,n)内	两根有且仅有一根在(m,n)内	一根在(m,n)内，另一根在(p,q)内
大致图象$(a>0)$			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(m)>0,\\ f(n)>0,\\ m<-\dfrac{b}{2a}<n\end{cases}$	$f(m)\cdot f(n)<0$	$\begin{cases}f(m)>0,\\ f(n)<0,\\ f(p)<0,\\ f(q)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)f(n)<0,\\ f(p)f(q)<0\end{cases}$
大致图象$(a<0)$			
得出的结论	$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(m)<0,\\ f(n)<0,\\ m<-\dfrac{b}{2a}<n\end{cases}$	$f(m)\cdot f(n)<0$	$\begin{cases}f(m)<0,\\ f(n)>0,\\ f(p)>0,\\ f(q)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(m)f(n)<0,\\ f(p)f(q)<0\end{cases}$

变式题 (1)[2023·江苏连云港一模] 已知方程 $x^2+(m-2)x+5-m=0$ 有两个不相等的实数根，且两个实数根都大于 2，则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $(-5,-4)\cup(4,+\infty)$

B. $(-5,+\infty)$

C. $(-5,-4)$

D. $(-4,-2)\cup(4,+\infty)$

(2)设 $a\in\mathbf{R}$，关于 x 的方程 $7x^2-(a+13)x+a^2+a-2=0$ 有两实数根 x_1,x_2，且 $0<x_1<1<x_2<2$，则实数 a 的取值范围是________.

探究点四 二次函数的零点问题

例 7 (1)[2023·宁波一模] 若函数 $f(x)=x^2+mx+n$ 在区间 $(-1,1)$ 上有两个零点，则 n^2-m^2+2n+1 的取值范围是 ( )

A. $(0,1)$ B. $(1,2)$

C. $(0,4)$ D. $(1,4)$

(2)(多选题)[2023·山西长治质检] 已知函数 $y=x^2+ax+b(a>0)$ 有且只有一个零点，则下列说法正确的是 ( )

A. $a^2-b^2\leqslant 4$

B. $a^2+\dfrac{1}{b}\geqslant 4$

C. 若关于 x 的不等式 $x^2+ax-b<0$ 的解集为 (x_1,x_2)，则 $x_1x_2>0$

D. 若关于 x 的不等式 $x^2+ax+b<c$ 的解集为 (x_1,x_2)，且 $|x_1-x_2|=4$，则 $c=4$

◆◆ **总结反思**

已知二次函数的零点所在区间求参数值(取值范围)常用的方法

(1)直接法：直接求解方程得到方程的根，再通过解不等式确定参数范围.

(2)数形结合法：结合二次函数的性质与零点存在定理，作出大致图象，得到关于参数的不等式组，求解可确定参数范围.

变式题 (多选题)设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$，若 $a+b+c=0$，$f(0)\cdot f(1)>0$，则下列说法正确的是 ( )

A. $a\neq 0$

B. 方程 $f(x)=0$ 有实根，且 $-2<\dfrac{b}{a}<-1$

C. 设 x_1,x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个实根，则 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant|x_1-x_2|<\dfrac{2}{3}$

D. 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有且只有一个实根

2. 【微点 1】[2023·广东珠海期末] 设函数 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+\frac{1}{2}\sin \pi x$,实数 a,b 满足不等式 $f(3a+b)+f(1-a)>0$,则下列不等式成立的是 ( )

A. $2a+b>1$

B. $2a+b<1$

C. $4a+b>3$

D. $4a+b<3$

3. 【微点 2、微点 3】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,若 $f(2x+1)$ 为偶函数,且 $f(x)+f(4-x)=2$,$f(1)=2$,则 $\sum\limits_{n=1}^{22}f(n)=$ ( )

A. 23　　B. 22

C. 19　　D. 18

4. 【微点 2、微点 3】[2024·江苏南京六校调研] 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x)=-f(1+x)$,则下列说法正确的是 ( )

A. $f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)$

B. 函数 $f(x)$ 的一个周期为 2

C. $f(2023)=0$

D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

5. 【微点 3】写出一个最小正周期为 1 的偶函数: $f(x)=$________.

思维拓展(一)
逻辑推理之抽象函数的性质

抽象函数主要有两个研究方向:一是由抽象函数结构、性质,联想已学过的基本函数,再由基本函数的相关结论,预测、猜想抽象函数可能有的相关结论.二是根据给出的抽象函数性质,推导其特殊的性质和关系.考题多和函数的性质(单调性、奇偶性、周期性等)相结合,以小题的方式考查.

例 [2022·新高考全国Ⅱ卷] 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$,$f(1)=1$,则 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=$ (A)

A. -3　　B. -2　　C. 0　　D. 1

【深度挖掘】

[解法一] 令 $x=1$,$y=0$,得 $2f(1)=f(1)f(0)$,所以 $f(0)=2$.令 $y=1$,得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)f(1)$,所以 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$,即 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$,所以 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$,所以 $f(x+2)=-f(x-1)$,即 $f(x+3)=-f(x)$,所以 $f(x)=-f(x+3)=f(x+6)$,即 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数.因为 $f(0)=2$,$f(1)=1$,$f(2)=f(1)-f(0)=-1$,$f(3)=-f(0)=-2$,$f(4)=-f(1)=-1$,$f(5)=-f(2)=1$,$f(6)=f(0)=2$,所以 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=[f(1)+f(2)+\cdots+f(18)]+[f(19)+f(20)+f(21)+f(22)]=f(19)+f(20)+f(21)+f(22)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-3$.

[解法二] 取 $f(x)=2\cos\frac{\pi}{3}x$ 符合条件,则 $T=6$,计算可得 $f(2)=-1$,$f(3)=-2$,$f(4)=-1$,$f(5)=1$,$f(6)=2$,所以 $\sum\limits_{k=1}^{6}f(k)=1-1-2-1+1+2=0$,所以 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1-1-2-1=-3$.

◆◆ 总结反思

解决抽象函数问题的常用方法:

方法一(通法)

1. 赋值,特殊值代入求值,如令 $x=-1,0,1$.

2. 通过函数式得到抽象函数的性质:

(1)通过 $f(x_1)-f(x_2)$ 的变换判断单调性;

(2)令式子中出现 $f(x)$ 和 $f(-x)$,判断函数的奇偶性;

(3)换 x 为 $x+T$ 确定是否具有周期性.

方法二(模型化)

结合具体函数,使得抽象函数具体化,常见的有:

(1)$f(p+q)=f(p)+f(q)$——$y=kx$;

(2)$f(p+q)=f(p)f(q)$——$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$;

(3)$f(pq)=f(p)+f(q)$——$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$;

(4)$f(pq)=f(p)f(q)$——$y=x^n(n$ 为常数$)$;

(5) $f(p+q)=\dfrac{f(p)+f(q)}{1-f(p)f(q)}$——$y=\tan x$;

(6) $f(p+q)+f(p-q)=2f(p)f(q)$——$y=\cos \omega x$.

注意转化与化归策略、迭代策略、数形结合策略等的运用.

【针对训练】

1. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数, $f(x)$ 不恒为零且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(x+1)f(x)$,则 $f\left(\dfrac{2025}{2}\right)$ 的值是 ( )

A. 0　B. $\dfrac{1}{2}$　C. 1　D. $\dfrac{5}{2}$

2. (多选题)[2024·山西忻州名校联考] 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$,且 $f(4)=12$,当 $x>1$ 时, $f(x)>0$,则 ( )

A. $f(1)=0$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

D. 不等式 $f(x+3)-f\left(\dfrac{2}{x}\right)<6$ 的解集是 $(0,1)$

3. (多选题)[2024·九省联考] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**,且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\neq 0$,若 $f(x+y)+f(x)f(y)=4xy$,则 ( )

A. $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$

B. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2$

C. 函数 $f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 是偶函数

D. 函数 $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ 是减函数

4. (多选题)[2023·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**, $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$,则 ( )

A. $f(0)=0$

B. $f(1)=0$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

第 9 讲　二次函数与幂函数

课标要求

1. 二次函数

(1)掌握二次函数的图象与性质(单调性、对称性、顶点、最值);

(2)了解二次函数的广泛应用.

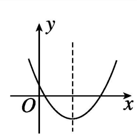
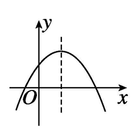
2. 幂函数

通过具体实例,结合 $y=x$, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$ 的图象,理解它们的变化规律,了解幂函数.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 二次函数的图象和性质

解析式	$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$	$y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$
图象		
定义域	**R**	**R**
值域	________	________

(续表)

解析式	$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$	$y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$
单调性	在________上单调递减,在 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增	在________上单调递增,在 $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减
顶点坐标	________	
奇偶性	当________时为偶函数	
对称轴方程	$x=-\dfrac{b}{2a}$	

(2)若函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{5}}(x^2+ax)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减,则 a 的取值范围是________.

◆◆ **总结反思**

利用对数函数的性质,求与对数函数有关的函数值域、最值和复合函数的单调性问题,必须弄清三方面的问题:一是定义域,所有问题都必须在定义域内讨论;二是底数与1的大小关系;三是复合函数的构成,即它是由哪些基本初等函数复合而成的.另外,解题时要注意数形结合、分类讨论、转化与化归思想的使用.

应用演练

1. 【微点1】已知 $a=3^{\frac{1}{3}}$, $b=\log_2\frac{1}{3}$, $c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{e}$,则 ( )

A. $a>c>b$　　B. $c>a>b$

C. $a>b>c$　　D. $c>b>a$

2. 【微点1】若 $a=\log_3 6$, $b=2$, $c=\log_{0.25}0.125$,则 ( )

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$

C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

3. 【微点3】已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-ax+8)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递减,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-6]$　　B. $[-11,-6]$

C. $(-11,-6]$　　D. $(-11,+\infty)$

4. 【微点2、微点3】[2024·重庆南开中学质检] 已知函数 $f(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}+\sin x$,则不等式 $f(x)+f(2x+1)<0$ 的解集为 ( )

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$　　B. $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

5. 【微点2】已知 $\log_a\frac{1}{2}<\log_a a^2$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$,则实数 a 的取值范围为________________.

增分微课1 指、对、幂函数之比较大小

类型一 直接利用单调性

例1 (1)[2023·南昌模拟] 已知 $a=\log_4 1.25$, $b=\log_5 1.2$, $c=\log_4 8$,则 ( )

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$

C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

(2) 已知 $a=\log_4 7$, $b=\log_9 30$, $c=e^{\ln\frac{3}{2}}$,则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$

C. $a<c<b$　　D. $c<b<a$

◆◆ **总结反思**

①底数相同,指数不同时,如 a^{x_1} 和 a^{x_2},利用指数函数 $y=a^x$ 的单调性比较大小;

②指数相同,底数不同时,如 x_1^a 和 x_2^a,利用幂函数 $y=x^a$ 的单调性比较大小;

③底数相同,真数不同时,如 $\log_a x_1$ 和 $\log_a x_2$,利用对数函数 $y=\log_a x$ 的单调性比较大小.

类型二 借助中间量

例2 (1)已知 $a=3^{0.2}$, $b=0.2^3$, $c=\log_3 0.2$,则 ( )

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

(2)[2023·沈阳三模] 已知 $a=\log_5 3$, $b=\log_{13}8$, $c=e^{-\frac{1}{2}}$,则下列判断正确的是 ( )

A. $a<b<c$

B. $a<c<b$

C. $c<a<b$

D. $b<c<a$

◆◆ **总结反思**

底数、指数、真数都不同时,寻找中间量0,1或者其他能判断大小关系的中间量$\left(如\frac{1}{2}\right)$,借助中间量进行大小关系的比较.

类型三　作差（商）比法

例 3 (1)[2023·安徽铜陵三模] 已知 $a=\log_7 5$，$b=\log_9 7$，$c=\log_{11} 9$，则 (　　)

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

(2)[2023·沈阳二中月考] 已知正实数 x,y 满足 $x<y$，设 $a=xe^x+y$，$b=ye^y+x$，$c=ye^x+x$，则 a,b,c 的大小关系是 (　　)

A. $a<c<b$　　B. $c<a<b$

C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

◆◆ **总结反思**

(1)一般情况下，作差或者作商可处理底数不一样的对数比较大小问题.

(2)作差或者作商的难点在于后续变形处理，注意此处的常见技巧和方法.

类型四　利用函数图象

例 4 (1)若 $\log_3 x=\log_4 y=\log_5 z<-1$，则 (　　)

A. $3x<4y<5z$

B. $4y<3x<5z$

C. $4y<5z<3x$

D. $5z<4y<3x$

(2)已知 a,b,c 均大于 1，满足 $\frac{2a-1}{a-1}=2+\log_2 a$，$\frac{3b-2}{b-1}=3+\log_3 b$，$\frac{4c-3}{c-1}=4+\log_4 c$，则下列不等式成立的是 (　　)

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$

C. $a<c<b$　　D. $c<a<b$

◆◆ **总结反思**

涉及某些由指数式、对数式给出的几个数的大小比较问题，可以把这几个数视为对应的指数函数、对数函数与另外某个函数图象交点的横坐标，利用图象的直观性解决.

类型五　构造函数

例 5 (1)已知 $e^x-2y>\ln y-x+\ln 2$，则 (　　)

A. $x>2y$　　B. $x<2y$

C. $x>\ln(2y)$　　D. $x<\ln(2y)$

(2)已知实数 a,b,c 满足 $a^2+\log_2 a=0$，$2025^{-b}=\log_{2025} b$，$c=\log_7\sqrt{6}$，则 (　　)

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$

C. $b<c<a$　　D. $c<b<a$

◆◆ **总结反思**

(1)从题目条件出发，探求比较对象的关系.

(2)根据条件等式的结构特征，发现同构特点，构造函数.

第 12 讲　函数的图象

课标要求

1. 掌握基本初等函数的图象特征，能熟练运用基本初等函数的图象解决问题.
2. 掌握图象的作法：描点法和图象变换.
3. 会运用函数的图象理解和研究函数性质.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 描点法作图

基本步骤是列表、描点、连线，具体为：

首先：①确定函数的定义域；②化简函数解析式；③讨论函数的性质（奇偶性、单调性、周期性）.

其次：列表（尤其注意特殊点、零点、最大值点、最小值点、与坐标轴的交点）.

最后：描点、连线.

2. 图象变换

(1)平移变换